ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:15

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 02/06/2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α

Α1. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ,

αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)=\eta$

Α3. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Α4. **α) Σ** **β) Σ** **γ) Λ** **δ) Λ** **ε) Σ**

Θεμα Β

Β1

Εχουμε την συνάρτηση $f(x)=x^3+ax^2+9x-3$

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $D_f=\mathbb{R}$

και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$

Επομένως απο Θ. Fermat $f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+9$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+9=0 \Leftrightarrow 3+2a+9=0$

$\Leftrightarrow 2a=-12 \Leftrightarrow a=-6$

Για $a=-6$: $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$, $x\in\mathbb{R}$

Β2

$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ και

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) \Leftrightarrow x\in(1,3)$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$\boxed{\Gamma_1}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot ημx, & x<0 \\ \sqrt{x^2+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για να είναι συνεχής στο $x_0=0$ αρκεί να δείξω ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x \cdot ημx) = e^0 \cdot ημ0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to} \sqrt{x^2+x} = \sqrt{0^2+0} = 0$
- $f(0) = \sqrt{0+0} = 0$

Άρα συνεχής στο $x_0=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x ημx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x \cdot \dfrac{ημx}{x} =$

$= e^0 \cdot 1 = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}$ $\dfrac{x>0}{\text{αφού } x\to 0^+}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα

Άρα όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

$\boxed{\Gamma_2}$ Η f έχει $A_f=\mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού δείξαμε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για $x<0$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, εκθετικής κ' τριγωνομετρικής κ' για $x>0$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
Οπότε για ασύμπτωτες θα ψάξουμε στο $+\infty$ κ' στο $-\infty$
– δεν έχει κατακόρυφη –

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

$=1+0=\boxed{1=\lambda.}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\right)\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\boxed{\frac{1}{2}=B}$

Άρα $\boxed{y=x+\frac{1}{2}}$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x\eta\mu x)=0$ διότι

$-1\le\eta\mu x\le1\overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow}-e^x\le e^x\eta\mu x\le e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x\eta\mu x)=0$, Οπότε η ευθεία $\boxed{y=0}$

είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$\boxed{Γ3}$ αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση

$f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει τουλ. μια ρίζα $\xi \in (-\pi, 0)$

Έστω $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

με $g(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} ημ(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} =$

$= + \pi - \frac{1}{2} > 0$

$g(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, άρα $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-\pi, 0)$.

$\boxed{Γ4}$ Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$

με $x'(t) > 0$. Για $y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow$

$$\frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t) \overset{x'(t)>0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{2x(t)+1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = 1 \Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)}$$ όλα θετικά

οπότε $(2x(t)+1)^2 = 4\sqrt{x^2(t)+x(t)}^2 \Leftrightarrow$

$$4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4\left(x^2(t) + x(t)\right)$$

$$\cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} + 1 = \cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} \Leftrightarrow 1 = 0$$

$\boxed{\because}$ Αδύνατο οπότε

δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ

να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης